单元 A10：复数

特定目标：

1. 学习复数的性质、几何表达法及应用。
2. 学习棣美弗定理及其在求复数的 n 次根、解多项式方程和证三角恒等式的应用。

内容	时间分配	教学建议
10.1 复数的定义及其算术运算	3	教师应简单介绍符号 i。数 $z = x + yi$，其中 x、y 为实数，称为复数，而 x、y 分别称为复数的实部(Re z)和虚部(Im z)。当 $x = 0$，$y \neq 0$，$z = yi$ 称为纯虚数；当 $y = 0$，$z = x$ 则为实数。 教师可问学生应如何定义复数等式，但须指出复数并无次序性质。 两个复数的和、差、积及商亦应给予定义。
10.2 阿根图、辐角和共轭	6	学生应知道以下各项的定义：复数 z 的模 $\lvert z \rvert$、辐角 arg z、辐角的主值和它的共轭复数 $\bar{z}$。 复数 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 的模辐形式亦可写为 $z = r\,\mathrm{cis}\,\theta$。 学生应理解下列复数的性质： (i) $\lvert z_1 z_2 \rvert = \lvert z_1 \rvert \lvert z_2 \rvert$ (ii) $\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi$，其中 k 为整数。 (iii) $\left\lvert \frac{z_1}{z_2} \right\rvert = \frac{\lvert z_1 \rvert}{\lvert z_2 \rvert}$ (iv) $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi$，其中 k 为整数且 $z_2 \neq 0$。 教师应教授下列共轭复数的性质： 1. $\bar{\bar{z}} = z$ 2. $\bar{z} = 0$ iff $z = 0$ 3. 一个复数是自共轭当且仅当其为实数。

内容	时间分配	教学建议
		4. $z \cdot \bar{z} = \lvert z \rvert^2$ 5. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$ 6. $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z_1} - \bar{z_2}$ 7. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$ 8. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}$，$z_2 \neq 0$ 利用此等性质，学生不难证明： 如α是实系数多项式方程的根，则 $\bar{\alpha}$ 亦为其根；即是若实系数多项式方程的根不是实数，则必以共轭偶(对) 形式出现。 学生应知道下列不等式： (i) $\lvert \mathrm{Re}\, z \rvert \leq \lvert z \rvert$ (ii) $\lvert \mathrm{Im}\, z \rvert \leq \lvert z \rvert$ (iii) $\lvert z_1 + z_2 \rvert \leq \lvert z_1 \rvert + \lvert z_2 \rvert$ (三角不等式) 学生亦可用类似方法证明： $\lvert z_1 - z_2 \rvert \geq \lvert z_1 \rvert - \lvert z_2 \rvert$ 和 $\lvert z_1 - z_2 \rvert \geq \lvert z_2 \rvert - \lvert z_1 \rvert$。 三角不等式可用数学归纳法推广至： $\lvert z_1 + z_2 + \ldots + z_n \rvert \leq \lvert z_1 \rvert + \lvert z_2 \rvert + \ldots + \lvert z_n \rvert$。 学生须学习复数在阿根图的几何表达法，并应知道实轴和虚轴。教师亦应教授复数的极形式的表达法及其几何意义。可介绍 $\mathrm{cis}\,\theta$ 的另一记法 $e^{i\theta}$ 给学生，固此 $z = r e^{i\theta}$；此记法称为复数的指数形式或欧拉形式。
10.3 于平面几何的简易应用	5	学生应知道三角不等式的几何意义，并须学习复数在平面几何的多种用途，以下为两例： 1. 在阿根图上，XYZ 为等边三角形，而其外心在原点上; 若 X 代表复数 1 + i，求 Y 和 Z 所代表的复数。

内容	时间分配	教学建议
10.4 棣美弗定理 **10.4a 有理数指数的棣美弗定理**	3	2. 若 z_1、z_2 和 z_3 为代表一等边三角形顶点的三个相异复数，则 $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_2z_3+z_3z_1+z_1z_2$。 学生应学习在阿根图上移动点的轨迹的例子，以下为两个简单例子： 1. 求出点 z 的轨迹，使得 $\lvert z-a\rvert=k$，其中 a 是一复数和 k 为一正常数。 2. 求出点 z 的轨迹，使得 $\left\lvert\frac{z-a}{z-b}\right\rvert=k$，其中 a、b 为复数，k 为不同值的正常数。， 学生应学习证明当 n 是正整数时，下列定理成立： $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ 此处假定 $(\cos\theta+i\sin\theta)^\circ=1$。 当 n 是负整数时，可设 $n=-m$，m 为一正整数，学生亦应能证明定理在 n 为负整数时也成立。但当 $n=\frac{p}{q}$，其中 p、q 为整数，$q\neq 0$，证明须待学生完成复数 n 次根的学习方可进行。
10.4b 于三角恒等式的应用	3	由棣美弗定理 $\cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n$，其中 n 为一正整数，可将 $\cos n\theta$ 和 $\sin n\theta$. 写成 $\cos\theta$ 及 $\sin\theta$. 的乘方。 设 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，则可利用 $\begin{cases} z+\frac{1}{z}=2\cos\theta \\ z-\frac{1}{z}=2i\sin\theta \end{cases}$ 和 $\begin{cases} z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos n\theta \\ z^n-\frac{1}{z^n}=2i\sin n\theta \end{cases}$

内容	时间分配	教学建议
10.4c 复数的 n 次根及其几何解释	5	将 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的乘方表为倍角的正弦和余弦。例如，学生应能将 $\cos^4\theta\sin^3\theta$ 表为倍角的正弦的和 及 $\cos^3\theta\sin^4\theta$ 表为倍角的余弦的和。 学生应学习复数 n 次根的定义；并须详细学习 1 的 n 次根(即 n 次单位根)。以下数例可供课堂讨论 ： 1. 求 -1 的五次根。 2. 解方程 $z^4+z^3+z^2+z+1=0$。 3. 求 $1+i$ 的立方根。 4. 因式分解 $z^{2n}-2z^n\cos n\theta+1$ 为实二次因式。
	25	