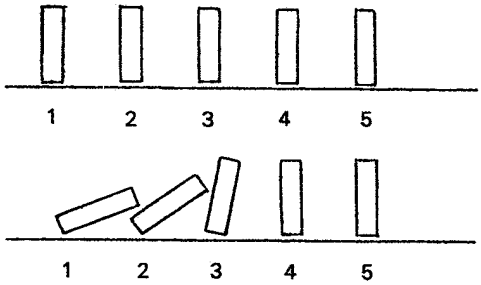
單元 A3：數學歸納法

特定目標：

1. 理解數學歸納法原理。
2. 運用數學歸納法原理證明有關正整數的命題。
3. 能修改數學歸納法原理以適合不同的需要。

內容	時間分配	教學建議
3.1 數學歸納法原理及其應用	6	作爲一簡單介紹，教師可要求學生考慮 $1 = 1$ $1 + 3 = 4$ $1 + 3 + 5 = 9$ …… …… 去推測首n個奇正整數之和的公式。建立了命題 $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$之後，學生在引導下應能理解到若僅驗證了有限次，他們還不能肯定此命題的一般正確性。教師可隨即示範利用數學歸納法去證明上述命題。 教師宜明確地將數學歸納法原理寫在黑板上，並可利用骨牌遊戲去幫助解釋其原理： 

內容	時間分配	教學建議
3.2 數學歸納法原理的其他常見形式及 其應用	6	教師應舉不同例子示範數學歸納法之應用，例子宜包括級數和、整除性及一些不等式的證明。數學歸納法原理在不同情況下有不同的變更。教師可用例子說明去證明命題一定要同時滿足數學歸納法的兩個條件，缺一不可。其他應用包括證明： (i) 正整指數的二項式定理 (ii) 棣美弗定理，其中 n 爲正整數 (iii) 一些和行列式及方陣有關的命題 (iv) 萊布尼茲定理及一些和 n 階導數有關的命題 作爲較深入的研究，教師可以和學生討論一些需要用歸納法的其他形式之情況。 *例*： $x^n + y^n$ 可被 $x + y$ 整除，其中 n 爲奇正整數。 *例*： 斐波那契序列定義如下： $a_0 = 0$ ， $a_1 = 1$ $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$ ，其中 n 爲自然數。 證明 $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ 。 教師應指出有必要修改數學歸納法原理才能證明上述兩例子。教師宜討論一些以遞推公式定義的序列例子。
	12	